

Giải phương trình bậc hai trên tập số phức

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0 (a, b, c \in \mathbb{C}; a \neq 0)$

Cách giải

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Gọi $\pm k$ là căn bậc hai của Δ , nghiệm của phương trình là: $z = \frac{-b - k}{2a}, z = \frac{-b + k}{2a}$

Đặc biệt nếu $b = 2b'$, ta tính Δ'

Gọi $\pm k'$ là căn bậc hai của Δ' , nghiệm của phương trình là: $z = \frac{-b' - k'}{a}, z = \frac{-b' + k'}{a}$

Bài 1. Giải các phương trình: $x^2 + 6x + 10 = 0$

Giải

$x^2 + 6x + 10 = 0$ có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 1, b = 6, b' = \frac{b}{2} = 3, c = 10$

Biệt số $\Delta' = b'^2 - ac = -1 = i^2$, Dùng kỹ thuật tìm căn bậc 2 đã học ta tìm được căn bậc hai của Δ' là $\pm i$
 Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 - i \text{ và } x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -3 + i$$

Bài 2. Giải các phương trình: $x^2 - 2(1 + 3i)x + 2i - 5 = 0$

$$x^2 - 2(1 + 3i)x + 2i - 5 = 0$$

$$b' = -(1 + 3i), c = (2i - 5)$$

Biệt số $\Delta' = b'^2 - ac = (1 + 3i)^2 - (2i - 5) = -3 + 4i$

Dùng kỹ thuật tìm căn bậc 2 đã học ta tìm được căn bậc hai của Δ' là $\pm(1 + 2i)$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x_1 = i$ và $x_2 = 2 + 5i$

Bài 3. Giải các phương trình: $z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i) = 0$

$$z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i) = 0$$

Biệt số $\Delta = b^2 - 4ac = (4 + i)^2 - 20(1 + i) = -5 - 12i$

Dùng kỹ thuật tìm căn bậc 2 đã học ta tìm được căn bậc hai của Δ là $2 - 3i$ và $-2 + 3i$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$

Bài 4. Giải các phương trình: $z^3 - 3(1 + 2i)z^2 + (-3 + 8i)z + 5 - 2i = 0$

$$z^3 - 3(1 + 2i)z^2 + (-3 + 8i)z + 5 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - 1)[z^2 - 2(1 + 3i)z + 2i - 5] = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ hoặc } z = i \text{ hoặc } z = 2 + 5i$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $z = 1, z = i, z = 2 + 5i$

Câu 1 : Phương trình $\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2 - 5\frac{4z+i}{z-i} + 6 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left\{-\frac{3}{2}i; -4i\right\}$ B. $S = \left\{-\frac{3}{2}i; 4i\right\}$ C. $S = \left\{\frac{3}{2}i; -4i\right\}$ D. $S = \left\{\frac{3}{2}i; 4i\right\}$

Giải

$$\left(\frac{4z+i}{z-i}\right)^2 - 5\frac{4z+i}{z-i} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4z+i}{z-i} = 2 \\ \frac{4z+i}{z-i} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{2}i \\ z = -4i \end{cases} \Rightarrow S = \left\{-\frac{3}{2}i; -4i\right\}$$

Đáp án A

Câu 2 : Phương trình $z^3 - (1+i)z^2 + (3+i)z - 3i = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left\{\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}\right\}$ B. $S = \left\{i; \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}\right\}$ C. $S = \left\{i; \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}; -i\right\}$ D. $S = \{i; -i\}$

$$z^3 - (1+i)z^2 + (3+i)z - 3i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - z + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Đáp án B

Câu 3 : $z^2 - 80z + 4099 - 100i = 0$

- A. $S = \{41 + 50i\}$ B. $S = \{39 - 50i\}$ C. $S = \{41 + 50i; 39 - 50i\}$ D. $S = \emptyset$

Giải

$$z^2 - 80z + 4099 - 100i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 40 + (50i + 1) \\ z = 40 - (50i + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 41 + 50i \\ z = 39 - 50i \end{cases}$$

Đáp án C

Câu 4 : Phương trình $(z + i)(z^2 - 2z + 2) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phức phân biệt

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

$$\text{Giải } (z + i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{cases}$$

3 nghiệm **Đáp án D**

Câu 5 Giải phương trình $x^2 - (3 + 4i)x + 5i - 1 = 0$ trên tập số phức

- A. $S = \{i + 1; 3i + 2\}$ B. $S = \{i + 1\}$ C. $S = \{3i + 2\}$ D. $S = \{i + 1; 3i + 2, i\}$

Giải

$$x^2 - (3+4i)x + 5i - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-i-1)(x-3i-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = i+1 \\ x = 3i+2 \end{cases}$$

Đáp án A

Câu 6 Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ C. Cả A và B D. Tất cả đều sai

$$\text{Giải } x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Đáp án C

Câu 7 : Giải phương trình $z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0$ trên tập số phức

- A. i B. i + 1 C. - i - 1 D. Cả A,B,C

Giải

$$z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z^2 = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = i+1 \\ z = -i-1 \end{cases}$$

Đáp án D

Câu 8 : Giải phương trình $z^3 + (i-3)z^2 + (4-4i)z - 4 + 4i = 0$ trên tập số phức

- A. $S = \{-2i; 2; i+1\}$ B. $S = \{2i; 2; i+1\}$ C. $S = \{-2i; -2; i+1\}$ D. $S = \{-2i; 2; i-1\}$

Giải

$$z^3 + (i-3)z^2 + (4-4i)z - 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2 - (3+i)z + 2+2i) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z-2)(z-i-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2i \\ z = 2 \\ z = i+1 \end{cases}$$

Đáp án A

Câu 9 : Tìm tất cả các số phức thỏa $(z-2)(\bar{z}+i)$ là số thực

Giải

Gọi $z = a + bi$

$$(z-2)(\bar{z}+i) = z\bar{z} + zi - 2\bar{z} - 2i = (a^2 + b^2) - b + ai - 2a + 2bi - 2i = a^2 + b^2 - b + 2a + (a+2b-2)i$$

Là số thực thì $a+2b-2 = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 2$

Vậy với mọi số phức có dạng $z = a + bi$ thỏa $a+2b=2$

Thì $(z-2)(\bar{z}+i)$ là số thực

Câu 10 : Giải các phương trình sau

a. $z^4 - 8(1-i)z^2 + 63 - 16i = 0$

Tổng các nghiệm của phương trình trên là

- A. i B. 2i C. 3i D. 0

Giải

Tổng các nghiệm của phương trình trùng phương là bằng 0 (nếu có nghiệm)

$$z^4 - 8(1-i)z^2 + 63 - 16i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 3 + 4i \\ z^2 = 5 - 12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = -2 - i \\ z = 3 - 2i \\ z = -3 + 2i \end{cases}$$

Tổng bằng 0 **Đáp án D**

Câu 11 ; Cho z_1, z_2 là nghiệm của $z^2 - (1+i\sqrt{2})z + 2 - 3i = 0$. Tính giá trị của Phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là
A. -4 B. -5 C. -6 D. -7

Giải $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = (1+i\sqrt{2})^2 - 2(2-3i) = -5 + (6+2\sqrt{2})i$

Đáp án B

Câu 12 Cho z_1, z_2 là nghiệm của $z^2 - (1+i\sqrt{2})z + 2 - 3i = 0$. Phần thực của $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2$

- A. 2 B. $2+3\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 0

Giải

$$z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = z_1 z_2 (z_1 + z_2) = (2-3i)(1+i\sqrt{2}) = 2+3\sqrt{2} + (-3+2\sqrt{2})i$$

Đáp án B

Câu 13 : Cho z_1, z_2 là nghiệm của $z^2 - (1+i\sqrt{2})z + 2 - 3i = 0$. Phần thực của $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$

- A. $\frac{-28-6\sqrt{2}}{13}$ B. $\frac{-28+6\sqrt{2}}{13}$ C. $\frac{28-6\sqrt{2}}{13}$ D. $\frac{28+6\sqrt{2}}{13}$

Giải

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{-5 + (6+2\sqrt{2})i}{2-3i} = \frac{-28-6\sqrt{2}}{13} + \frac{-3+4\sqrt{2}}{13}i$$

Đáp án A

Câu 14 Giải phương trình

a. $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$

- A. $\begin{cases} z = -2i \\ z = -1+2i \\ z = -1-2i \end{cases}$ B. $\begin{cases} z = 2i \\ z = -1+2i \\ z = -1-2i \end{cases}$ C. $\begin{cases} z = i \\ z = -1+2i \\ z = -1-2i \end{cases}$ D. $\begin{cases} z = -i \\ z = -1+2i \\ z = -1-2i \end{cases}$

Giải

$$z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 + 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -1+2i \\ z = -1-2i \end{cases}$$

Đáp án B

Câu 15 $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$ phương trình trên có nghiệm thuần ảo là

- A. i B. $-i$ C. $2i$ D. $-2i$

Giải

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 + z - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$